МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОГИЛЕВСКОГО ОБЛАСТНОГО ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО КОМИТЕТА

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

УТВЕРЖДАЮ
Директор колледжа
_________ С.Н.Козлов
29.08.2018

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ИЗУЧЕНИЮ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ,
ЗАДАНИЯ НА ДОМАШНИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ № 1, 2
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ
ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 2-40 01 01
«ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

2018

Автор: Острошапкина С.Ю., преподаватель учреждения образования «Могилевский государственный политехнический колледж»

Рецензент: Сенькевич Е.А., преподаватель учреждения образования «Могилевский государственный политехнический колледж»

Разработано на основе типовой учебной программы по учебной дисциплине «Математика», утвержденной Министерством образования Республики Беларусь, 2014.

Обсуждено и одобрено
на заседании цикловой комиссии
естественно-математических дисциплин

Протокол № _____ от ________________

Пояснительная записка

Программой учебной дисциплины «Математика» предусматривается изучение отдельных разделов и тем, способствующих не только уверенному владению навыками арифметических вычислений, но и умению применять аппарат аналитической геометрии и линейной алгебры и дифференциальное и интегральное исчисление в математическом моделировании и информационных технологиях.

В результате изучения программного материала учащиеся должны усвоить, что математические понятия, являясь абстракцией свойств и отношений реального мира, обладают большой общностью и имеют широкую сферу применения.

В содержание учебной дисциплины включены темы «Введение в курс математики», «Комплексные числа», «Элементы линейной алгебры», «Элементы векторной алгебры», «Функция», «Элементы аналитической геометрии», «Предел последовательности и предел функции. Непрерывность функции», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Функции многих переменных», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл. Несобственные интегралы», «Дифференциальные уравнения», «Числовые и функциональные ряды. Ряды Фурье».

Содержание учебной дисциплины «Математика» разработано в соответствии с образовательным стандартом специальности 2-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий» и с учетом того, что на данной специальности изучается учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика».

Цель математического образования в учреждениях ССО выражается в единстве трех ее составляющих:

- удовлетворение личностных потребностей учащихся в соответствующем уровне математического образования;

- обеспечение качества математического образования учащихся в соответствии с интересами общества и государства;

- формирование математической компетентности учащихся для последующего осуществления профессиональной деятельности продолжения образования.

Исходя из этого, основными задачами математического образования учащихся учреждений ССО являются:

- формирование математической компетентности учащихся в контексте будущей профессиональной деятельности и для продолжения образования;

- обучение учащихся навыкам использования основных математических методов с целью их последующего применения в профессиональной деятельности для анализа и исследования реальных процессов и явлений;
- формирование представлений о методологическом значении и роли математики в научно-техническом (общественном) прогрессе, о культурологической сущности математики.

Общие методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы

Для выполнения домашних контрольных работ в начале изучается теория и приведенные примеры решения задач. Изучение теории ведется по одному из учебников по программе, имеющейся в данных методических указаниях.

Задания на домашние контрольные работы разработаны в количестве 100 вариантов в соответствии с программой курса.

Вариант каждой работы выбирается в соответствии с двумя последними цифрами шифра учащегося по таблице вариантов. Вариант каждой работы содержит 7 заданий. Решения должны быть четкими, по существу, логически последовательными. Качество домашней контрольной работы оценивается прежде всего, по тому, насколько правильно и самостоятельно даются решения задач и в какой степени используется рекомендованная литература.

При выполнении заданий надо помнить следующее:

1 Каждая работа выполняется в отдельной тетради школьного формата. Следует пронумеровать страницы и оставить на них поля не менее 3см для замечаний преподавателя.

2 На обложке тетради должен быть прикреплен титульный лист утвержденного образца или аккуратно записаны все данные титульного листа: шифр, специальность, фамилия, имя, отчество учащегося, учебная дисциплина и номер работы, номер группы.

3 Работа должна быть выполнена чернилами одного цвета, аккуратно, разборчиво.

4 Каждую задачу надо начинать с новой страницы.

5 Решение задач желательно располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера задач следует указывать перед условием.

6 Условия задач должны быть обязательно переписаны полностью. К геометрическим задачам, кроме того, дается установленная краткая запись условия.

7 При оформлении записей в тетради необходимо выполнять общие требования к культуре их ведения. Перечислим важнейшие из требований:

а) учащиеся должны соблюдать абзацы, всякую новую мысль учащийся должен начинать с красной строки;

б) важные формулы, равенства, определения нужно выделять в отдельную строку, чтобы сделать их более обозримыми;

в) в описании решения задач краткая запись условия отделяется от решения, и в конце решения ставится ответ;

г) серьезное внимание следует уделять правильному написанию сокращенных единиц величин;

д) необходимо правильно употреблять математические символы.

8 Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями, используемые формулы нужно выписывать.

9 Чертежи следует выполнять карандашом с использованием чертежных инструментов, соблюдая масштаб.

10 В конце работы следует указать список используемых источников, которыми вы пользовались, проставить дату выполнения работы и подпись.

11 Если в работе допущены недочеты или ошибки, то учащийся должен выполнить все указания преподавателя, сделанные в рецензии.

12 Домашняя контрольная работа должна быть выполнена в срок (в соответствии с учебным графиком). В период сессии работы на проверку не принимаются.

13 Учащиеся, не имеющие зачета по домашней контрольной работе, к экзамену не допускаются.

14 Во время экзамена зачтенные домашние контрольные работы представляются преподавателю.

Критерии оценки домашней контрольной работы

В домашней контрольной работе должны быть решены все предложенные задачи. Домашние контрольные работы, не имеющие решения хотя бы одной задачи или не соответствующие заданному варианту, не зачитываются.

Выполняя домашнюю контрольную работу по учебной дисциплине «Математика», необходимо обратить пристальное внимание на правильное оформление работы, иначе, даже, в том случае если все задачи решены верно, работа может быть не зачтена (см. ниже).

При оценке в первую очередь учитываются показанные учащимся знания и умения. Отметка (зачтено, не зачтено) зависит также от наличия и характера погрешностей, допущенных учащимися.

Среди погрешностей выделяются ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что учащийся не овладел основными знаниями, умениями, указанными в учебной программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или об отсутствии знаний, не считающихся в программе основными (например, материал изучен в школьном курсе или ранее). Недочетами также считаются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного учащимися задания или способа его выполнения; неаккуратная запись; небрежное выполнение чертежа.

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

К грубым ошибкам относятся ошибки, которые обнаруживают незнание учащимися формул, правил, основных свойств, теорем и неумение их применять; незнание приемов решения задач, рассматриваемых в учебниках, а также вычислительные ошибки, если они не являются опиской.

К негрубым ошибкам относятся: потеря корня или сохранение в ответе постороннего корня; отбрасывание без объяснений одного из них и равнозначные им др. неточности, не искажающие математического смысла решения задачи.

К недочетам относятся: нерациональные решения, описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решениях.

Отметка «зачтено» ставится, если:

- работа выполнена полностью и в соответствии с вариантом;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении имеется незначительное количество математических ошибок (возможны не более одной ошибки в отдельных задачах (двух-трех), не искажающее дальнейший ход решения, или две-три неточности, описки, не являющиеся следствием незнания или непонимания учебного материала.

Отметка «не зачтено» ставится, если:

- работа выполнена по варианту, не соответствующему шифру;
- в работе отсутствует решение хотя бы одной задачи;
- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках в трех и более задачах;
- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере (смотрите программу учебной дисциплины);
- работа показала полное отсутствие у учащегося обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

1 семестр

Программа учебной дисциплины

Тема 1 Введение в курс математики

Многочлены. Корни многочлена. Теорема Безу. Действия над многочленами. Общий вид разложения многочленов на множители. Методы разложения

Рациональные дроби. Разложение на сумму простейших дробей. Метод неопределенных коэффициентов

Литература: [1], [3], [14]

Тема 2 Элементы линейной алгебры

Понятие матрицы с числовыми элементами, виды матриц. Линейные операции над матрицами

Транспонирование и умножение матриц. Натуральная степень матрицы

Элементарные преобразования матриц, преобразование к треугольной и трапециевидной форме

Определители 2-го порядка, определители 3-го порядка, их свойства, способы вычисления

Определители n-го порядка, их свойства, способы вычисления

Обратная матрица. Вычисление обратной матрицы. Решение матричных уравнений

Понятие системы линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Литература: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16], [17]

Тема 3 Элементы векторной алгебры

Понятие вектора на плоскости и в пространстве, линейные операции над векторами в геометрической форме

Аффинная и прямоугольная декартова системы координат, координаты вектора. Длина вектора, линейные операции над векторами в прямоугольных декартовых координатах

Скалярное произведение векторов: определение, свойства, вычисление в координатной форме

Векторное произведение векторов: определение, свойства, вычисление в координатной форме

Смешанное произведение векторов: определение, свойства, вычисление в координатной форме

Полярная система координат на плоскости

Литература: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16], [17]

Тема 4 Элементы аналитической геометрии

Различные виды уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой

Кривые второго порядка (эллипс, гипербола, парабола): канонические уравнения, основные характеристики, изображения кривых

Уравнения плоскости в пространстве. Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости

Уравнения прямой в пространстве

Поверхности второго порядка: канонические уравнения, изображения поверхностей

Литература: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16], [17]

Тема 5 Функция

Понятие функции, ее свойства, график. Обратная функция. Сложная функция

Элементарные функции. Графики основных элементарных функций

Неявно заданная функция, параметрически заданная функция

Построение кривых, заданных неявно, параметрически и в полярной системе координат

Литература: [1], [2], [3], [4], [5], [7], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16], [17]

Тема 6 Предел последовательности и предел функции. Непрерывность функции

Числовая последовательность. Способы задания числовой последовательности. Виды последовательностей

Понятие предела последовательности. Свойства предела последовательности

Неопределенности. Вычисление пределов последовательностей.

Число e

Понятие предела функции в точке (по Гейне и по Коши). Свойства предела

Понятие предела функции на бесконечности

Понятие бесконечно больших и бесконечно малых функций, их свойства

Неопределенности. Вычисление пределов функций

Первый и второй замечательные пределы. Вычисление пределов

Односторонние пределы

Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций

Классификация разрывов функции

Непрерывность функции на отрезке. Теоремы о непрерывных функциях

Асимптоты графика функции (горизонтальная, вертикальная и наклонная)

Литература: [1], [2], [3], [4], [5], [7], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16], [17]

Тема 7 Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Приращение аргумента, приращение функции. Понятие производной

Механический (физический) и геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции

Основные правила дифференцирования

Таблица производных. Нахождение производных с использованием таблицы производных и правил дифференцирования

Производная сложной функции. Нахождение производных сложных функций

Основные теоремы о дифференцируемых функциях. Правило Лопиталя

Дифференциал первого порядка, его свойства, использование в приближенных вычислениях

Производные высших порядков. Нахождение производных высших порядков. Формула Лейбница. Дифференциалы высших порядков

Монотонность и локальный экстремум функции. Достаточные условия

Выпуклость, вогнутость и перегиб графика функции

Исследование функции и построение графика

Литература: [1], [2], [3], [4], [5], [7], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16], [17]

Тема 8 Неопределенный интеграл

Понятие первообразной, неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов. Нахождение интегралов с помощью свойств и таблицы

Методы интегрирования: замена переменной, внесение функции под знак дифференциала

Интегрирование дроби, содержащей квадратный трехчлен в знаменателе

Метод интегрирования по частям

Интегрирование рациональных функций

Интегрирование тригонометрических функций

Интегрирование иррациональных функций: метод рационализации выражения, тригонометрическая замена

Литература: [1], [2], [3], [4], [5], [7], [9], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17]

Примерный перечень вопросов к экзамену

1 Понятие матрицы с числовыми элементами, виды матриц. Линейные операции над матрицами

2 Транспонирование и умножение матриц. Натуральная степень матрицы

3 Элементарные преобразования матриц, преобразование к треугольной и трапециевидной форме

4 Определители 2-го и 3-го порядков, их свойства, способы вычисления

5 Определители n-го порядка, их свойства, способы вычисления

6 Обратная матрица и ее вычисление.

7 Решение матричных уравнений

8 Понятие системы линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

9 Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера

10 Решение систем линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы

11 Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

12 Понятие вектора в пространстве, линейные операции над векторами в геометрической форме

13 Аффинная и прямоугольная декартова системы координат, координаты вектора

14Длина вектора, линейные операции над векторами в прямоугольных декартовых координатах

15 Скалярное произведение векторов в пространстве: определение, свойства, вычисление в координатной форме

16 Векторное произведение: определение, свойства, вычисление в координатной форме

17 Смешанное произведение векторов: определение, свойства, вычисление в координатной форме

18 Полярная система координат на плоскости

19 Кривые второго порядка: эллипс. Каноническое уравнение, основные характеристики, изображение кривой

20 Кривые второго порядка: гипербола. Каноническое уравнение, основные характеристики, изображение кривой

21 Кривые второго порядка: парабола. Каноническое уравнение, основные характеристики, изображение кривой

22 Уравнения плоскости в пространстве.

23 Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости

24 Уравнения прямой в пространстве

25 Поверхности второго порядка: канонические уравнения, изображения поверхностей

26 Неявно заданная функция, параметрически заданная функция

27 Построение кривых, заданных неявно, параметрически и в полярной системе координат

28 Понятие предела функции в точке (по Коши). Предел функции на бесконечности

29 Понятие бесконечно больших и бесконечно малых функций, их свойства

30 Неопределенности. Вычисление пределов

31 Первый и второй замечательные пределы. Вычисление пределов

32 Односторонние пределы

33 Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций

34 Классификация разрывов функции

35 Непрерывность функции на отрезке. Теоремы о непрерывных функциях

36 Асимптоты графика функции (горизонтальная, вертикальная и наклонная)

37 Вычисление производных с использованием таблицы производных и правил дифференцирования

38 Основные теоремы о дифференцируемых функциях.

39 Правило Лопиталя

40 Дифференциал первого порядка: определение, свойства

41 Использование дифференциала для приближенных вычислений

42 Производные высшего порядка, их вычисление, формула Лейбница

43 Дифференциалы высшего порядка

44 Монотонность и локальный экстремум функции. Достаточные условия

45 Выпуклость, вогнутость и перегиб графика функции

46 Исследование функции и построение графика

47 Понятие первообразной, понятие неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов. Нахождение интегралов с помощью свойств и таблицы

48 Методы интегрирования: замена переменной, внесение функции под знак дифференциала

49 Интегрирование дроби, содержащей квадратный трехчлен в знаменателе

50 Метод интегрирования по частям

51 Интегрирование рациональных функций

52 Интегрирование тригонометрических функций

53 Интегрирование иррациональных функций: метод рационализации выражения

54 Интегрирование иррациональных функций: тригонометрическая замена

2 семестр

Программа учебной дисциплины

Тема 9 Определенный интеграл. Несобственные интегралы

Понятие определенного интеграла, его свойства

Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов с помощью таблицы интегралов, свойств интеграла, формулы Ньютона-Лейбница

Применение методов интегрирования по частям, замены переменной, внесения функции под знак дифференциала для вычисления определенных интегралов

Определенный интеграл от четных, нечетных и периодических функций

Геометрические и физические приложения определенного интеграла

Несобственный интеграл 1 рода: понятие, вычисление, условия сходимости

Несобственный интеграл II рода: понятие, вычисление, условия сходимости

Литература: [1], [2], [3], [4], [5], [7], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16], [17]

Тема 10 Числовые и функциональные ряды. Ряды Фурье

Понятие числового ряда, частичной суммы ряда, суммы ряда, остатка ряда. Необходимое условие сходимости ряда

Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: признак сравнения, признак Д'Аламбера, признак Коши, интегральный критерий

Знакопеременные числовые ряды, абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Оценка остатка ряда

Понятие функционального ряда, область сходимости и сумма ряда

Степенные ряды. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы, интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена. Использование разложений для приближенных вычислений

Ортогональная тригонометрическая система. Тригонометрический ряд Фурье 2π-периодической функции в действительной форме. Теорема Дирихле сходимости ряда Фурье

Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье. Разложение функций заданных на полупериоде

Литература: [2], [4], [7], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16]

Тема 11 Функции многих переменных

Понятие функции многих переменных. Линии и поверхности уровня. Предел и непрерывность

Частные производные первого порядка функции многих переменных. Полный дифференциал функции многих переменных

Частные производные высших порядков

Литература: [1], [2], [3], [4], [5], [7], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16], [17]

Тема 12 Комплексные числа

Арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме

Тригонометрическая форма записи комплексного числа, действия над числами в тригонометрической форме

Показательная форма записи комплексного числа, действия над числами в показательной форме

Литература: [1], [2], [3], [4], [5], [7], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16], [17]

Тема 13 Дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение 1-го порядка: понятие, решение, задача Коши. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

Однородное дифференциальное уравнение

Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Дифференциальное уравнение Бернулли

Дифференциальные уравнения высших порядков: понятие, решение, задача Коши. Дифференциальные уравнения, которые допускают понижение порядка

Линейное однородное дифференциальное уравнение высшего порядка с постоянными коэффициентами

Система n линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, решение сведением к линейному дифференциальному уравнению n-го порядка

Литература: [1], [2], [3], [4], [5], [7], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16], [17]

Примерный перечень вопросов к экзамену

1 Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов с помощью таблицы интегралов, свойств интеграла, формулы Ньютона-Лейбница

2 Применение метода интегрирования по частям для вычисления определенных интегралов

3 Применение методов замены переменной и внесения функции под знак дифференциала для вычисления определенных интегралов

4 Определенный интеграл от четных, нечетных и периодических функций

5 Геометрические приложения определенного интеграла

6 Физические приложения определенного интеграла

7 Несобственный интеграл 1 рода: понятие, вычисление, условия сходимости

8 Понятие числового ряда, частичной суммы ряда, суммы ряда, остатка ряда

9 Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд. Ряд Дирихле

10 Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: признак сравнения

11 Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: признак Даламбера

12 Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: радикальный признак Коши

13 Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: интегральный признак Коши

14 Знакопеременные числовые ряды, абсолютная и условная сходимости

15 Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Оценка остатка ряда

16 Понятие функционального ряда, область сходимости и сумма ряда

17 Степенные ряды. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда

18 Непрерывность суммы, интегрирование и дифференцирование степенных рядов

19 Формула Тейлора для многочлена

20 Формула Тейлора для произвольной функции

21 Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена

22 Использование разложений в приближенных вычислениях

23 Ортогональная тригонометрическая система

24 Тригонометрический ряд Фурье 2π-периодической функции в действительной форме

25 Теорема Дирихле сходимости ряда Фурье

26 Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье

27 Понятие функции многих переменных. Линии и поверхности уровня

28 Предел функции многих переменных

29 Непрерывность функции многих переменных

30 Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области

31 Частные производные первого порядка функции многих переменных

32 Полный дифференциал функции многих переменных

33 Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

34 Частные производные высшего порядка

35 Алгебраическая форма записи комплексного числа. Арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме

36 Геометрическое изображение комплексных чисел

37 Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа

38 Действия над числами в тригонометрической форме

39 Показательная форма комплексного числа

40 Действия над комплексными числами в показательной форме

41 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

42 Дифференциальное уравнение 1-го порядка: понятие, решение, задача Коши

43 Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

44 Однородное дифференциальное уравнение

45 Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка

46 Дифференциальное уравнение Бернулли

47 Дифференциальные уравнения высших порядков: понятие, решение, задача Коши

48 Дифференциальные уравнения, которые допускают понижение порядка

49 Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

50 Линейные однородные ДУ второго порядка

51 Линейное однородное дифференциальное уравнение высшего порядка с постоянными коэффициентами

52 Система n линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, решение сведением к линейному дифференциальному уравнению n-го порядка

Список используемых источников

1 Богомолов, Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие для техникумов / Н.В.Богомолов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990.

2 Булдык, Г.М. Сборник задач и упражнений по высшей математике с примерами решений / Г.М.Булдык. – Мн.: ООО «Юнипресс», 2002.

3 Валуцэ, И.И. Математика для техникумов на базе средней школы / И.И.Валуцэ, Г.Д.Дилигул. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

4 Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я.Выгодский. – М.:, 1995.

5 Гусак, А.А. Высшая математика. В 2-х т. Т. 1: учеб. пособие для студентов ВУЗов / А.АГусак. – Мн.: ТетраСистемс, 1998.

6 Гусак, А.А. Высшая математика. В 2-х т. Т. 2: учеб. пособие для студентов ВУЗов / А.А.Гусак. – Мн.: ТетраСистемс, 1998.

7 Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. – 4-е изд. стереотип. – Мн.: ТетраСистемс, 2002.

8 Гуцанович, С.А. Элементы дискретной математики в занимательных примерах и задачах / С.А.Гуцанович, О.И.Мельников. – Минск, 2008.

9 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч: учеб. пособие для ВУЗов / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. – 6-е изд. – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2002.

10 Индивидуальные занятия по высшей математике: учебное пособие в 4 ч / А.П.Рябушко [и др.]. – Минск, 2000.

11 Лекции по теории графов / В.А.Емеличев [и др.]. – Москва, 1990.

12 Лихолетов, И.И. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистики / И,И.Лихолетов, И.П.Мацкевич. – Минск, 1976.

13 Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1, 2 курс / К.Н.Лунгу, Д.Т.Письменный, С.Н.Федин, Ю.А.Шевченко. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2004.

14 Математика в примерах и задачах: учебное пособие для учащихся колледжей: в 6 ч / под редакцией Л.И.Майсени. – Минск, 2006-2009.

15 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1,2 часть / Д.Т.Письменный. – 2-е изд., испр. – Москва: Айрис-пресс, 2003.

16 Руководство к решению задач по высшей математике: учебное пособие: в 2 ч. Ч. 1, 2 / Г.И.Гурский [и др.]. В.П.Домашов, В.К.Кравцв, А.П.Сильванович / под редакцией Г.И.Гурского. – Минск: Высш. Шк., 1990.

17 Сочнев, С.В. Элементы высшей математики: сб. заданий для практ. занятий: учеб. пособие / С.В.Сочнев. – Мн.: Выш. шк., 2003.

Методические рекомендации по выполнению задач домашней контрольной работы № 1

Пример решения типового варианта

1 Решить систему уравнений: а) методом матричного исчисления; б) по формулам Крамера; в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23; \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение

а) Составляем матричное уравнение АХ = В, где

$$\text{À}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{Õ}=\begin{pmatrix} \text{Õ}_1 \\ \text{Õ}_2 \\ \text{Õ}_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{Â}=\begin{pmatrix} \text{b}_1 \\ \text{b}_2 \\ \text{b}_3 \end{pmatrix}$$

и решим его указанным способом. Находим определитель матрицы А, используя правило Сарруса:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times2\times2 + 3\times1\times0 + 2\times1\times0 - 0\times2\times0 - 3\times2\times2 - 1\times1\times1 = -9 \neq 0;$$

Найдем все алгебраические дополнения матрицы А:

$$A_{11} = -1^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times2 - 1\times1 = 3;$$

$$A_{12} = -1^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(3\times2 - 1\times0) = -6;$$

$$A_{13} = -1^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 3\times1-2\times0=3;$$

$$A_{21} = -1^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -\ 2\times2-1\times0\ =-4;$$

$$A_{22} = -1^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} = 1\times2-0\times0=2;$$

$$A_{23} = -1^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} = -\ 1\times1-2\times0\ =-1;$$

$$A_{31} = -1^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 2\times1-2\times0=2;$$

$$A_{32} = -1^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix} = -\ 1\times1-3\times0\ =-1;$$

$$A_{33} = -1^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 1\times2-2\times3=-4.$$

Составляем матрицу

$$\begin{pmatrix}3 & -6 & 3\\ -4 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

и транспонируем ее:

$$\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{-9} \times \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Итак, решение системы уравнений есть $x_1 = 4$; $x_2 = 3$; $x_3 = 5$.

б) Вычислим определитель системы и определители при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 23 & 2 & 1 \\ 13 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 40 + 26 - 92 - 10 = -36;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 3 & 23 & 1 \\ 0 & 13 & 2 \end{vmatrix} = 46 - 60 - 13 = -27;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 3 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 26 + 30 - 78 - 23 = -45.$$

Найдем значения x, y, z по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-36}{-9} = 4;$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-27}{-9} = 3;$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-45}{-9} = 5.$$

Итак, получаем ответ: (4; 3; 5).

в) Переставим третье уравнение на место второго:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10; \\ x_2 + 2x_3 = 13; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 3 & 2 & 1 & 23 \end{array}\right)$$

Чтобы в первом столбце получить $a_{21} = a_{31} = 0$, умножим первую строку на 3 и вычтем результат из третьей строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & -4 & 1 & -7 \end{array}\right)$$

Умножим вторую строку на четыре, полученные результаты сложим с третьей строкой:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{array}\right)$$

Запишем новую эквивалентную систему, которой соответствует расширенная матрица:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10; \\ x_2 + 2x_3 = 13; \\ 9x_3 = 45. \end{cases}$$

Выполняя обратный ход, с помощью последовательных подстановок находим неизвестные:

$$9x_3 = 45; \qquad x_3 = 5;$$

$$x_2 + 2\times5 = 13;\ x_2 = 13 - 2\times5 = 3;$$

$$x_1 + 2\times3 = 10;\ x_1 = 10 - 2\times3 = 4.$$

Итак, получаем ответ: (4; 3; 5).

2 Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках
A_1 (-2,-1,-1), A_2(0,3,2), A_3(3,1,-4), A_4(-4,7,3) и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$

Решение

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$. Объем тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, как известно, равен одной трети произведения площади основания на высоту. У параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ та же высота OA_4, а площадь основания в два раза больше.

Из геометрического смысла смешанного произведения следует, что

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V_{\text{парал}} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3} \right|.$$

По координатам данных точек A_1, A_2, A_3, A_4 находим координаты векторов:

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (-4-2; 7-1; 3-1) = (-6, 6, 2);$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (3-2; 1-1; -4-1) = (1, 0, -5);$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (0-2; 3-1; 2-1) = (-2, 2, 1).$$

Поэтому

$$\overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} -6 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \times 0 \times 1 + 1 \times 2 \times 2 +$$
$$+6 \times (-5) \times (-2) - (-2) \times 0 \times 2 - 1 \times 6 \times 1 - 2 \times (-5) \times (-6) =$$
$$= 4 + 60 - 6 - 60 = -2.$$

Итак,

$$V_{\text{ièð}} = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3} \text{ куб. ед.}$$

Из формулы

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h;$$

$$h = \frac{3V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}}.$$

$S_{осн}$ найдем как $\frac{1}{2} S_{\text{пар}}$, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$.

Так как

$$S_{\text{пар}} = \left\| \left[\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_2} \right] \right\| =$$
$$= \sqrt{(y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (z_1x_2 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2},$$

То

$$S_{\text{îñí}} = \frac{1}{2}\sqrt{\ 0 \times 1 - (-5) \times (-2)\ ^2 + ((-5) \times (-2) - 1 \times 1)^2 + (1 \times 2 - 0 \times (-2))^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{100 + 81 + 4} = 6{,}8\text{åä.êâ}$$

Тогда

$$h = OA_4 = \frac{3 \times \frac{1}{3}}{6{,}8} = 0{,}15\text{åä.}$$

3 Треугольник задан вершинами A(2;-1), B(-7;3) и C(-1;-5). Составить уравнение биссектрисы угла C.

Решение

Найдем точку M пересечения биссектрисы угла C со стороной AB. Известно, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные длинам прилежащих сторон треугольника. Следовательно, λ = BM:MA = CB:CA. Так как $BM = \sqrt{(-1+7)^2 + (-5-3)^2} = 10$, $MA = \sqrt{(-1-2)^2 + (-5+1)^2} = 5$, то $\lambda = 10/5 = 2$. Вычислим координаты точки M:

$$x_M = \frac{-7 + 2 \times 2}{1+2} = -1, \quad y_M = \frac{3 + 2(-1)}{1+2} = \frac{1}{3}, \quad M\left(-1; \frac{1}{3}\right).$$

Абсциссы точек C и M равны, следовательно, биссектриса угла C параллельна оси Oy: x=-1 или x+1=0.

4 Построить кривую, заданную в полярных координатах уравнением $\rho=\varphi$.

Решение

Кривая, заданная уравнением $\rho = \varphi$, называется спиралью Архимеда. Для ее построения зададим значения полярного угла и найдем из уравнения соответствующие значения полярного радиуса таблица 1.

Таблица 1 – Значения аргумента функции

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

На лучах $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ и $\varphi = 2\pi$ (последний луч совпадает с полярной осью) отложим соответствующие значения ρ. Из уравнения кривой следует, что если мы будем увеличивать то φ, то ρ будет возрастать. Кривая построена на рисунке 1.

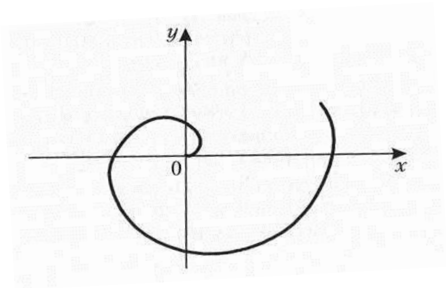

Рисунок 1 – График кривой

5 Вычислить пределы, не используя правило Лопиталя

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x^2+5x+7}{3x^3+4x^2-x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$.

Решение

а) Здесь пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю. Умножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, получаем

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2+x-2+x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$
$$=\frac{2x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}2}{5\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$
$$=\frac{2}{5\times 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Методические указания. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, в которой числитель и (или) знаменатель содержат иррациональность, следует соответствующим образом избавиться от иррациональности.

б) При $x\to\infty$ неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разделим числитель и знаменатель на x^3. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+5x+7}{3x^3+4x^2-x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}=\frac{2}{3};$$

так как $3/x$, $5/x^2$,$7/x^3$, $4/x$, $1/x^2$, $2/x^3\to 0$ при $x\to\infty$.

Методические указания. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданную отношением двух многочленов, надо числитель и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень, а затем перейти к пределу.

в) Произведем подстановку kx =y. Отсюда следует, что y$\to$0 при x$\to$0, а x = y/k. Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin ky}{y/k}==\lim_{y\to 0}\frac{k\sin y}{y}=k\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=k,$$

так как $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$.

г) Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}\right)^{6}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}\right)^{6}.$$

Положим x/2 = y. Тогда при неограниченном возрастании x переменная y также будет неограниченно возрастать. Поэтому, используя второй замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e.$$

Итак,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=e^{6}.$$

6 Исследовать функцию и построить ее график: $y=\frac{x^3}{3-x^2}$.

Решение

1) Функция определена на всей оси Ох, за исключением точек $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$, в которых функция имеет разрыв.

2) Функция нечетная, так как f(–x) = –f(x). Ее график симметричен относительно начала координат. В связи с этим можно исследовать функцию только для точек справа от оси координат.

3) Если x = 0, то y = 0, т.е. график функции проходит через начало координат. Других точек пересечения графика с осями координат нет.

4) Находим

$$\acute{o}' = \frac{(\tilde{o}^3)'(3-\tilde{o}^2)-(3-\tilde{o}^2)'\tilde{o}^3}{(3-x^2)^2} = \frac{3x^2(3-x^2)+2x\times x^3}{(3-x^2)^2} =$$

$$= \frac{9x^2-3x^4+2x^4}{(3-x^2)^2} = \frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}$$

Из уравнения $x^2(9-x^2)=0$ получим (при условии $x \geq 0$) $x_1=0$, $x_2=3$.

5) Производная может менять знак при прохождении через эти точки разрыва функции и $x = \sqrt{3}$, в которой производная не существует. Так как $x^2 \geq 0$ и $(3 - x^2)^2 \geq 0$, то знак производной определяется знаком разности $9 - x^2$. Поэтому при $0 < x < \sqrt{3}$ и $\sqrt{3} < x < 3$ имеем $y' > 0$; следовательно, y возрастает в этих промежутках; при x > 3 имеем $y' < 0$; значит y убывает в этом промежутке. Итак, в точке x = 3 функция имеет максимум, равный $y_{max} = f(3) = -9/2$.

Составим таблицу 2 для рассматриваемой части области определения:

Таблица 2 – Значение функции и производной на заданной области определения

x	$(0; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; 3)$	3	$(3; \infty)$
y′	+	+	0	–
У	↗	↗	$y_{max} = -9/2$	↘

6) Находим

$$y'' = \left(\frac{9x^2 - x^4}{(3 - x^2)^2}\right)' = \frac{(9x^2 - x^4)'(3 - x^3)^2 - (9x^2 - x^4)((3 - x^3)^2)'}{(3 - x^2)^4} =$$

$$= \frac{(18x - 4x^3)(3 - x^3)^2 - (9x^2 - x^4)2(3 - x^2)(-2x)}{(3 - x^2)^4} =$$

$$= \frac{2x(9 - x^2)(3 - x^2) + 2x(18x^2 - 2x^4)}{(3 - x^2)^3} =$$

$$= \frac{2x(27 - 9x^2 - 6x^2 + 2x^4 + 18x^2 - 2x^4)}{(3 - x^2)^3} = \frac{2x(27 + 3x^2)}{(3 - x^2)^3} =$$

$$= \frac{6x(9 + x^2)}{(3 - x^2)^3}.$$

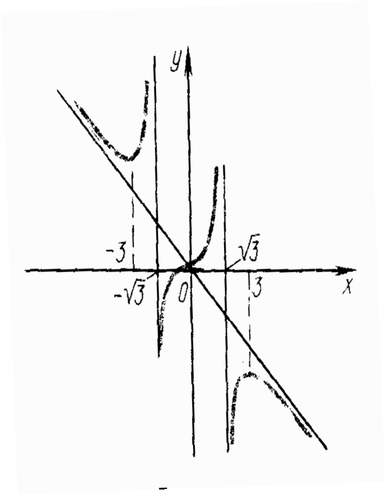

Рисунок 2 – График функции

Очевидно, что y″=0 только при x = 0; кроме того, y″ не существует при x = $\sqrt{3}$ (напомним, что мы рассматриваем значения x ≥ 0). В интервале (0; $1/\sqrt{3}$) имеем y″> 0, т.е. кривая вогнута, а в интервале ($1/\sqrt{3}$; ∞) имеем y″< 0, т.е. кривая выпукла.

Вследствие симметрии графика относительно начала координат заключаем, что y″> 0 в интервале (–$\sqrt{3}$; 0) и y″> 0 в интервале (–∞; –$\sqrt{3}$). Это означает, что (0; 0) – точка перегиба.

7) Исследуем данную функцию на наличие асимптот т.к.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^3}{3-x^2} = \infty,$$

то $x = \sqrt{3}$ - вертикальная асимптота графика функции.

Найдем наклоненые асимптоты графика функции, если они существуют. Вычислим пределы:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(3-x^2)\times x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{3}{x^3}-1} = -1;$$

$$\text{в}=\lim_{x\to\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{3-x^2} + x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{3-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{3}{x^2}-1} = 0$$

А значит, наклонная асимптота задается уравнением y= -x.

Горизонтальных асимптот график не имеет.

Вследствие симметрии графика относительно начала координат, имеем: $y = \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$ - вертикальные асимптоты графика функции; y=-x – наклонная асимптоты

8) График изображен на рисунке 2.

7 Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x} dx$; б) $\int x^2 e^x dx$; в) $\int \frac{dx}{x^5 - x^2}$; г) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}} dx$;

д) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5.}$

Решение

а) Перепишем данный интеграл в виде $\int (2\ln x + 3)^3 \frac{1}{x} dx.$ Так как производная выражения 2lnx+3 равна 2/x, а второй множитель 1/x отличается от этой производной только постоянным коэффициентом 2, то нужно применить подстановку 2lnx + 3 = t.

Тогда

$$2\times\frac{dx}{x}=dt,\qquad \frac{dx}{x}=\frac{1}{2}dt.$$

Следовательно,

$$\int(2\ln x+3)^3\frac{dx}{x}=\int t^3\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^3dt=\frac{1}{8}t^4+C=\frac{1}{8}(2\ln x+3)^4+C.$$

б) Положим $u=x^2, dv=e^x$; тогда $du=e^x dx, v=e^x$. Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx.$$

Мы добились понижения степени x на единицу. Чтобы найти $\int xe^xdx,$ применим еще раз интегрирование по частям. Полагаем $u=x, dv=e^xdx$; тогда $du=dx, v=e^x$ и $\int x^2e^xdx=x^2e^x-2(xe^x-\int e^xdx)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C=e^x(x^2-2x+2)+C.$

в) Разложим знаменатель на множители:

$$x^5-x^2=x^2(x^3-1)=x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Тогда

$$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$1=A(x-1)(x^2+x+1)+Bx(x-1)(x^2+x+1)+Cx^2(x^2+x+1)+(Dx+E)x^2(x-1)$.
Действительными корнями знаменателя являются числа 0 и 1.
При $x=0$ имеем $1=-A$, т.е. $A=-1$; при $x=1$ имеем $1=3C$, т.е. $C=1/3$.
Перепишем предыдущее равенство в виде

1=A(x^3-1)+B(x^4-x)+C(x^4+x^3+x^2)+Dx^4+Ex^3-Dx^3-Ex^2.

Сравнивая коэффициенты при $x^{4,}$ x^3, x^2, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} B+C+D=0, \\ A+C+E-D=0, \\ C-E=0, \end{cases}$$

из которой найдем B=0, D=-1/3, E=1/3. Итак,

$$\frac{1}{x^5-x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x^5-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-$$

$$-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|(x-1)|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

г) Выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$\int\frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx=\int\frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx=\frac{5}{4}\int\frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx-$$

$$-13\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}|+C.$$

д) Подынтегральная функция рационально зависит от sin x и cosx; применим подстановку

tg (x/2)=t , тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \times \frac{2t}{1+t^2} + 3 \times \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C.$$

Методические рекомендации по выполнению задач домашней контрольной работы № 2

Пример решения типового варианта

1 Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$ б) $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$ в) $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

Решение

а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\,|_{\pi/6}^{\pi/4} = tg\,\frac{\pi}{4} - tg\,\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$

б) Воспользуемся методом интегрирования по частям. Положим $u = x, dv = e^{-x}dx,$ откуда $du = dx, v = -e^{-x}$. Тогда:

$$\int\limits_0^1 xe^{-x}dx = -xe^{-x}\,|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\,|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}.$$

в) Положим $\ln x = t$;тогда $\frac{dx}{x} = dt$;если $x = 1,$ то $t = 0$; если $x = e,$ то $t = 1$.

Следовательно, $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}t^3\,|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$

2 Найти радиус и область сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n};$ б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n (x-3)^n$.

Решение

а) Радиус сходимости данного ряда вычисляется по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Здесь $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Тогда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$$

В данном примере $x_0 = 0$, поэтому интервалом сходимости ряда будет (-1,1).

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

Подставим в ряд сначала $x = -1$, а затем $x = 1$. При $x = -1$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Этот ряд знакочередующийся, он сходится по признаку Лейбница. В самом деле, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ и абсолютные величины членов ряда образуют убывающую последовательность:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < a_n = \frac{1}{n}.$$

При $x = 1$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Этот ряд расходится. Следовательно, областью сходимости данного ряда является полуинтервал [-1,1).

б) Радиус сходимости найдём по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

Здесь $a_n = 2^n$. Тогда $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}$.

В данном примере $x_0 = 3$, поэтом интервалом сходимости ряда будет (5/2,7/2).

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

Положив $x = 5/2$, получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+...+(-1)^n+...,$$

А при $x = 7/2$ – ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}1^n = 1+1+1+1+...+1^n+....$$

Оба ряда расходятся, так как не выполняется необходимое условие сходимости ряда. В первом случае $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует, а во втором $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$.

3 Найти d^3z, если $z = (x+y)\cos(x-2y)$.

Решение

Используем формулу третьего дифференциала

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx\ dy^{\ 2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3$$

Производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ((x+y)\cos(x-2y))'_x = (x+y)'_x \times \cos(x-2y) + (x+y)\times\ \cos(x-2y)\ '_x =$$
$$= \cos(x-2y) - (x+y)\sin(x-2y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = ((x+y)\cos(x-2y))'_y = (x+y)'_y \times \cos(x-2y) + (x+y)\times\ \cos(x-2y)\ '_y =$$
$$= \cos(x-2y) + 2(x+y)\sin(x-2y).$$

Производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}= \cos(x-2y)-(x+y)\sin(x-2y)\;{}'_x = \cos(x-2y)\;{}'_x - (x+y)\sin(x-2y)\;{}'_x =$$
$$=-2\sin(x-2y)-(x+y)'_x\times\sin(x-2y)-(x+y)\ \sin(x-2y)\;{}'_x=-2\sin(x-2y)-$$
$$-(x+y)cos(x-2y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}= \cos(x-2y)+2(x+y)\sin(x-2y)\;{}'_y = \cos(x-2y)\;{}'_y +2\ (x+y)\sin(x-2y)\;{}'_x =$$
$$=4\sin(x-2y)+2(x+y)'_y\times\sin(x-2y)+2(x+y)\ \sin(x-2y)\;{}'_y=4\sin(x-2y)-$$
$$-4(x+y)cos(x-2y).$$

Производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}= -2\sin(x-2y)-(x+y)cos(x-2y)\;{}'_x = -2\sin(x-2y)\;{}'_x -(x+y)'_x cos(x-2y)-$$
$$-(x+y)\ cos(x-2y)\;{}'_x=-3\cos(x-2y)+(x+y)\sin(x-2y);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}= 4\sin(x-2y)-4(x+y)cos(x-2y)\;{}'_y = 4\sin(x-2y)\;{}'_y -$$
$$-4\left((x+y)'_y cos(x-2y)+(x+y)\ cos(x-2y)\;{}'_y\right)=-12\cos(x-2y)-8(x+y)\sin(x-2y);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}= -2\sin(x-2y)-(x+y)cos(x-2y)\;{}'_y = -2\sin(x-2y)\;{}'_y -$$
$$-\left((x+y)'_y cos(x-2y)+(x+y)\ cos(x-2y)\;{}'_y\right)=3\cos(x-2y)-2(x+y)\sin(x-2y);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}= 4\sin(x-2y)-4(x+y)cos(x-2y)\;{}'_y = 4\sin(x-2y)\;{}'_y -$$
$$-4\left((x+y)'_y cos(x-2y)+(x+y)\ cos(x-2y)\;{}'_y\right)=4(x+y)\sin(x-2y).$$

Подставляя вычисленные производные в формулу дифференциала, получим:

$$d^3z = \ -3\cos(x-2y)+(x+y)\sin(x-2y)\ \ (dx)^3 +$$
$$+3\ \ 3\cos(x-2y)-2(x+y)\sin(x-2y)\ \ (dx)^2 dy +$$
$$+3\ \ 4(x+y)\sin(x-2y)\ \ dx\ \ dy\ ^2 +$$
$$+\ \ -12\cos(x-2y)-8(x+y)\sin(x-2y)\ \ (dy)^3$$

4 Представить в тригонометрической и показательной форме число $z = 3 - 3i\sqrt{3}$.

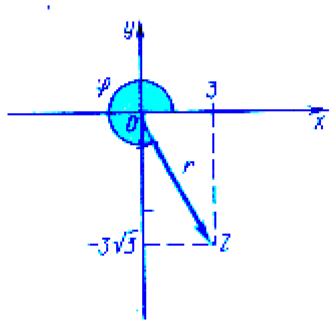

Рисунок 3 – Геометрическая интерпретация

Решение

Так как a=3, $b = -3\sqrt{3}$, то

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 9 \times 3} = 6.$$

Геометрически определяем, что числу z соответствует точка Z, лежащая в IV четверти, (рисунок 3).

Составим отношения

$$\cos\varphi = a/r = 3/6 = 1/2, \sin\varphi = b/r = -3\sqrt{3}/6 = -\sqrt{3}/2.$$

Отсюда следует, что φ=360º-60º=300º или $\varphi = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$. Значит, r=6, $\varphi = \dfrac{5\pi}{3}$. Итак, $z = 6\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$ - тригонометрическая форма, а $z = 6e^{\frac{5\pi}{3}i}$ - показательная форма данного числа.

5 Найти общий интеграл уравнения:

а) $(x^2+2xy)dx + xydy = 0$; б) $3y'^2 = 4yy'' + y^2$.

Решение

а) Здесь $H(x,y)=x^2+2xy$, $Q(x,y)=xy$. Обе функции – однородные второго измерения.

Введем подстановку $y=tx$, откуда $dy=xdt+tdx$. Тогда уравнение примет вид

$$(x^2+2x^2t)dx+tx^2(xdt+tdx)=0, \text{ или } (x^2+2x^2t+t^2x^2)dx+tx^3dt=0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dx}{x}+\frac{tdt}{(t+1)^2}=0; \quad \int\frac{dx}{x}+\int\frac{tdt}{(t+1)^2}=C.$$

Преобразуем второй интеграл:

$$\ln|x|+\int\frac{t+1-1}{(t+1)^2}dt=C, \quad \text{или} \quad \ln|x|+\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}=C.$$

Возвращаясь к прежней неизвестной функции y ($t=y/x$), получаем окончательный ответ:

$$\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}=C.$$

б) Разделим обе части уравнения на y^2:

$$3\left(\frac{y'}{y}\right)^2-4\times\frac{y''}{y}=1.$$

Положим $\dfrac{y'}{y}=z$, откуда $\dfrac{y''}{y}-\dfrac{y'^2}{y^2}=z'$, или $\dfrac{y''}{y}=z'+z^2$. В результате получим уравнение

$3z^2$-$4z^2$-$4z'$=1, или -$4z'$=1+z^2, т.е. $\frac{dz}{1+z^2}=-\frac{1}{4}dx$.

Отсюда, интегрируя, находим

$$arctgz=C_1-\frac{1}{4}x \text{, или } z=tg\left(C_1-\frac{x}{4}\right)\text{, или } \frac{y'}{y}=tg\left(C_1-\frac{x}{4}\right).$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\ln y=4\ln\cos\left(C_1-\frac{x}{4}\right)+\ln C_2 \text{, или } y=C_2\cos^4\left(C_1-\frac{x}{4}\right).$$

Задания на домашнюю контрольную работу № 1 по учебной дисциплине «Математика»

1 Решить систему уравнений: а) методом матричного исчисления; б) по формулам Крамера; в) методом Гаусса:

1.1 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ 1.2 $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -18; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 19; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ 1.4 $\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 8; \\ 5x_1 - 2x_2 = 9; \\ 2x_1 - 3x_3 = 10. \end{cases}$

1.5 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ 1.6 $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7; \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

1.7 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$ 1.8 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

1.9 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ 1.10 $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 11; \\ 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

2 Вычислить объем тетраэдра с вершинами в указанных точках и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

2.1 $A_1(4,2,5)$; $A_2(0,7,2)$; $A_3(0,2,7)$; $A_4(1,5,0)$;
2.2 $A_1(4,4,10)$; $A_2(4,10,2)$; $A_3(2,8,4)$; $A_4(9,6,4)$;
2.3 $A_1(4,6,5)$; $A_2(6,9,4)$; $A_3(2,10,10)$; $A_4(7,5,9)$;
2.4 $A_1(3,5,4)$; $A_2(8,7,4)$; $A_3(5,10,4)$; $A_4(4,7,8)$;
2.5 $A_1(10,6,6)$; $A_2(-2,8,2)$; $A_3(6,8,9)$; $A_4(7,10,3)$;
2.6 $A_1(1,8,2)$; $A_2(5,2,6)$; $A_3(5,7,4)$; $A_4(4,10,9)$;
2.7 $A_1(6,6,5)$; $A_2(4,9,5)$; $A_3(4,6,11)$; $A_4(6,9,3)$;
2.8 $A_1(7,2,2)$; $A_2(5,7,7)$; $A_3(5,3,1)$; $A_4(2,3,7)$;
2.9 $A_1(8,6,4)$; $A_2(10,5,5)$; $A_3(5,6,8)$; $A_4(8,10,7)$;
2.10 $A_1(7,7,3)$; $A_2(6,5,8)$; $A_3(3,5,8)$; $A_4(8,4,1)$.

3.1 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;2)$ и отсекающей на координатных осях отрезки равной длины.

3.2 Отрезок, определяемый точками $M(-8;-9)$, $N(-3;-4)$, разделён на пять равных частей. Найти координаты точек деления.

3.3 Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(2;0)$, $B(5;-6)$, $C(8;3)$.

3.4 Точка $A(2;5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0$. Найти площадь этого квадрата.

3.5 Найти угол между прямыми и построить их: $y-2x-3=0$ и $y+3x-2=0$.

3.6 Доказать, что прямые параллельны и найти расстояние между ними: $3x-4y-10=0$ и $6x-8y+12=0$.

3.7 Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(5;-2)$ и параллельно оси ординат.

3.8 Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $5x-y+10=0$ и $8x+4y+16=0$ и параллельно прямой $x+3y=0$.

3.9 Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x-3y+5=0$ и $3x+y-1=0$ и перпендикулярно к прямой $y=2x$.

3.10 Даны вершины $A(2;2)$, $B(6;5)$, $C(0;3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины D и уравнения сторон.

4 Построить кривую в полярной системе координат.

4.1 $\rho=2\varphi$; 4.4 $\rho=2\cos\varphi$; 4.7 $\rho=\dfrac{3}{\varphi}$;

4.2 $\rho=0,5\varphi$; 4.5 $\rho=1+2\varphi$; 4.8 $\rho=\dfrac{2}{\varphi}$;

4.3 $\rho=-\varphi$; 4.6 $\rho=4\sin\varphi$; 4.9 $\rho=\dfrac{2}{\varphi+\frac{\pi}{3}}$; 4.10 $\rho=\dfrac{2}{\varphi-\pi}$.

5 Вычислить пределы, не используя правило Лопиталя:

5.1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\tilde{o}+1}-\sqrt{2\tilde{o}+1}}{\tilde{o}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x}{x^3-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$.

5.2 а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x+8}{2x^3-x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+\tilde{o}}{3}\right)^{2/\tilde{o}}$.

5.3 а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+4}}{x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x-1}{2x^3+5x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\tilde{o}+5}{\tilde{o}}\right)^{x}$.

5.4 а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{2\tilde{o}+1}-\sqrt{13-\tilde{o}})}{\tilde{o}-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}$.

5.5 а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-3}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3tgx}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3\tilde{o}+2}{3\tilde{o}}\right)^{3x}$.

5.6 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-2x+3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}$.

5.7 а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+6x-4}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+1}{x^2-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-6x)^{(2-3/x)}$.

5.8 а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+5}{3x^3+7x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\tilde{o}+2}{\tilde{o}}\right)^{2x}$.

5.9 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+8x-1}{x^5+7x^3+11}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 17x}{8x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{4x}$.

5.10 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$; г) $\lim\limits_{\text{x}\to\infty}\left(\dfrac{1-\tilde{o}}{\tilde{o}}\right)^{\text{x}}$.

6 Исследовать функцию и построить ее график:

6.1 $\text{f}(\text{x})=\dfrac{\tilde{o}}{\tilde{o}\ \ -3}$ 6.2 $\text{f}(\text{x})=\dfrac{1-3\text{x}}{\text{x}}$

6.3 $\text{y}=\dfrac{4-\text{x}}{\text{x}}$ 6.4 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

6.5 $y=\dfrac{1-\tilde{o}}{3x}$ 6.6 $y=\dfrac{6x\ \ -1}{x}$

6.7 $\text{y}=\dfrac{\text{x}\ \ -12}{\text{x}-1}$ 6.8 $\text{y}=\dfrac{\text{x}\ \ -4}{\text{x}+1}$

6.9 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 6.10 $\text{y}=\dfrac{\text{x}}{\text{x}\ \ +1}$

7 Вычислить интегралы:

7.1 а) $\displaystyle\int\frac{x-\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$; б) $\displaystyle\int x\cos x dx$; в) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-3)(x^2-2x+5)}$;

г) $\displaystyle\int\frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}}dx$; д) $\displaystyle\int\frac{dx}{1-\sin x}$.

7.2 а) $\displaystyle\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$; б) $\displaystyle\int xe^x dx$; в) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+2)(1+x^2)}$;

г) $\displaystyle\int\frac{4x+3}{\sqrt{x^2-5}}dx$; д) $\displaystyle\int\frac{dx}{5+4\sin x}$.

7.3 а) $\displaystyle\int\frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}dx$; б) $\displaystyle\int x^5\ln x dx$; в) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$;

г) $\displaystyle\int\frac{7x+2}{\sqrt{x^2+10}}dx$; д) $\displaystyle\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$.

7.4 а) $\int \frac{3\sqrt{x} - 2\cos\frac{1}{x^2}}{x^3} dx$; б) $\int xe^{2x} dx$; в) $\int \frac{3x-4}{x^2-4} dx$;

г) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; д) $\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x + 4}$.

7.5 а) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ б) $\int x^2 \sin x dx$; в) $\int \frac{dx}{(2x-3)(x^2+x+1)}$;

г) $\int \frac{(2x-5)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; д) $\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x} dx$.

7.6 а) $\int \frac{(arctgx)^3 dx}{1+x^2}$; б) $\int arctgx dx$; в) $\int \frac{x+8}{x^2+3} dx$;

г) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{1+x^2}}$; д) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

7.7 а) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$; б) $\int x \sin x dx$; в) $\int \frac{dx}{(x+1)(2+x^2)}$;

г) $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{1+x^2}}$; д) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^7 x}$.

7.8 а) $\int \frac{2-3ctg^2 x dx}{\cos^2 x}$; б) $\int x \ln x dx$; в) $\int \frac{dx}{(2x-1)(x^2-2x+17)}$;

г) $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x+17}}$; д) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

7.9 а) $\int \frac{e^{tgx} dx}{\sin^2 x}$ б) $\int (4x^3+6x-7)\ln x dx$; в) $\int \frac{dx}{(2x+3)(1+x^2)}$;

г) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2+x^2}}$; д) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$.

7.10 а) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$; б) $\int x \sin 2x dx$; в) $\int \frac{dx}{(2x-5)(x^2-2x+5)}$;

г) $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$; д) $\int \frac{dx}{3\cos x + 4\sin x}$.

Задания на домашнюю контрольную работу № 2 по учебной дисциплине «Математика»

1 Вычислить определенные интегралы:

1.1 а) $\int_{1}^{4}(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$; б) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\sqrt[4]{2x-1}dx$; в) $\int_{0}^{1} xarctgxdx$;

1.2 а) $\int_{1}^{9}\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int_{1}^{1}(2x+1)^3dx$; в) $\int_{0}^{1}3e^{x^3}x^2dx$;

1.3 а) $\int_{1}^{8}\sqrt[3]{x^2}dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$; в) $\int_{1}^{e^2}\ln^2 xdx$;

1.4 а) $\int_{8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}e^{\sin x}\cos xdx$; в) $\int_{0}^{9}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{x}}{2}}\mathrm{dx}$;

1.5 а) $\int_{0}^{\lg 2}2^x5^x dx$; б) $\int_{-0,4}^{0}(2+5x)^4dx$; в) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

1.6 а) $\int_{-1}^{2}(x^2-3x+7)dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2-\sin x}dx$; в) $\int_{1}^{e}x^2\ln 2xdx$;

1.7 а) $\int_{-1}^{1}(3x^2+x-1)dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1-\cos x}dx$; в) $\int_{1}^{e}x\ln^2 xdx$;

1.8 а) $\int_{2}^{4}(32+28x-9x^2)dx$; б) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int_{0}^{1}x^2 3^x dx$;

1.9 а) $\int_{0}^{\pi}(2x+\sin 2x)dx$; б) $\int_{-6}^{6}x^3\sqrt{6+3x^2}dx$; в) $\int_{1}^{2}arctg\sqrt{x}dx$;

1.10 а) $\int_{-2}^{3}(4x^3-3x^2+2x+1)dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{1-2\cos x}dx$; в) $\int_{0}^{2}\ln(x^2+4)dx$.

2 Найти радиус и область сходимости степенного ряда:

2.1 $\sum_{\text{ò}=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{(\mathrm{n}+1)}}{\mathrm{n}!}\mathrm{x}^{\mathrm{n}}$; 2.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^n$; 2.3 $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{(2\mathrm{n})!}{\mathrm{n}+1}\mathrm{x}^{\mathrm{n}}$;

2.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{(n+1)}x^n$; 2.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}x^n$; 2.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt{n}}x^n$;

2.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$; 2.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n(n+2)}x^n$; 2.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{2^n(3n-1)}}x^n$;

2.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}x^n$.

3 Вычислить дифференциал третьего порядка d^3u, для функции $u(x,y)$.

3.1 $u=(x+y)+e^{x+y}$; 3.2 $u=(x+2y)+e^{x-y}$; 3.3 $u=x^2y^5+\frac{x}{y}$;

3.4 $u=xy+\sin(2x-y)$; 3.5 $u=x^2+e^{xy}$; 3.6 $u=e^{x-y}+xy$;

3.7 $u=(x-2y)+\sin(xy)$; 3.8 $u=\sin^2(x-2y)$;

3.9 $u=\cos(x-y)+xy$; 3.10 $u=\frac{x}{y}+xy$.

4 Представить в тригонометрической и показательной форме числа:

4.1 a=$\frac{2\sqrt{2}}{(1+i)}$; 4.2 a=$\frac{4}{(1+i\sqrt{3})}$; 4.3 a=$\frac{-2\sqrt{2}}{(1-i)}$;

4.4 a=$\frac{-4}{(1-i\sqrt{3})}$; 4.5 a= $\frac{-2\sqrt{2}}{(1+i)}$; 4.6 a=$\frac{2\sqrt{2}}{(1-i)}$;

4.7 a=$\frac{4}{(1-i\sqrt{3})}$; 4.8 a=$\frac{-4}{(\sqrt{3}+i)}$; 4.9 a=$\frac{1}{(\sqrt{3}+i)}$;

4.10 a=$\frac{1}{(\sqrt{3}-i)}$.

5 Найти общий интеграл уравнения:

5.1 а) $(x^2-y^2)y'=2xy$; б) $(1+x^2)y''=xy'$;

5.2 а) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$; б) $2yy''+(y')^2+(y')^4=0$;

5.3 а) $\frac{xy}{y}=\ln(x/y)$; б) $y''+y'\mathrm{tg}x=\sin 2x$;

5.4 а) $xy'+y-3=0$; б) $y''+\frac{1}{x}y'=x^2$;

5.5 а) $xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0$; б) $1+(y')^2+yy''=0$;

5.6 а) $y'\cos x=(y+1)\sin x$; б) $y''(1+y)-5(y')^2=0$;

5.7 а) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$; б) $xy''+2y'=x^3$;

5.8 а) $x^2y'=2xy+3$; б) $y''\mathrm{tg}y=2(y')^2$;

5.9 а) $x^2y'+y^2-2xy=0$; б) $y''-2y'\mathrm{tg}x=\sin x$;

5.10 а) $xy'+y$-ч$-1=0$; б) $3yy''+(y')^2=0$.

Таблица 3 – Варианты заданий на домашние контрольные работы № 1, 2 по учебной дисциплине «Математика»

Пред-по-след-няя цифра шифра	Последняя цифра шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1.1, 2.2, 3.3, 4.4, 5.5, 6.6, 7.7	1.2, 2.3 3.4, 4.5, 5.6, 6.7 7.9	1.3, 2.4, 3.2, 4.1, 5.5, 6.6, 7.7	1.4, 2.2, 3.1, 4.3, 5.5, 6.6, 7.7	1.5, 2.1, 3.2, 4.3, 5.7, 6.4, 7.6	1.6, 2.6, 3.4, 4.6, 5.6, 6.6, 7.5	1.7, 2.7, 3.3, 4.7, 5.7, 6.7, 7.4	1.8, 2.8, 3.10, 4.8, 5.8, 6.8, 7.3	1.9, 2.9, 3.1, 4.9, 5.9, 6.9, 7.2	1.10, 2.9, 3.8, 4.7, 5.6, 6.5, 7.1
1	1.2, 2.1, 3.2, 4.1, 5.2, 6.3, 7.10	1.1, 2.2, 3.1, 4.2, 5.3, 6.2, 7.2	1.2, 2.3, 3.10, 4.3, 5.1, 6.1, 7.5	1.3, 2.4, 3.9, 4.4, 5.2, 6.5, 7.4	1.4, 2.5, 3.8, 4.5, 5.3, 6.4, 7.3	1.5, 2.1, 3.7, 4.1, 5.4, 6.3, 7.2	1.6, 2.2, 3.6, 4.2, 5.5, 6.2, 7.1	1.7, 2.3, 3.5, 4.3, 5.6, 6.1, 7.10	1.8, 2.1, 3.4, 4.1, 5.1, 6.10, 7.9	1.9, 2.2, 3.9, 4.2, 5.1, 6.9, 7.3
2	1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.1, 6.2, 7.2	1.4, 2.4, 3.2, 4.6, 5.9, 6.3, 7.1	1.5, 2.5, 3.1, 4.5, 5.10, 6.1, 7.3	1.6, 2.6, 3.2, 4.6, 5.1, 6.2, 7.4	1.7, 2.7, 3.1, 4.7, 5.2, 6.3, 7.3	1.8, 2.8, 3.10, 4.8, 5.3, 6.4, 7.2	1.10,2.10, 3.8, 4.10, 5.5, 6.6, 7.8	1.9, 2.9, 3.9, 4.9, 5.4, 6.5, 7.1	1.9, 2.1, 3.3, 4.1, 5.8, 6.7, 7.8	1.8, 2.2, 3.8, 4.2, 5.2, 6.8, 7.3

Продолжение таблицы 3

Пред-по-след-няя цифра шифра	Последняя цифра шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1.4, 2.3, 3.4, 4.3, 5.5, 6.1, 7.2	1.4, 2.4, 3.3, 4.4, 5.8, 6.5, 7.2	1.5, 2.5, 3.2, 4.5, 5.1, 6.4, 7.5	1.1, 2.1, 3.3, 4.1, 5.2, 6.3, 7.4	1.5, 2.9, 3.3, 4.1, 5.2, 6.2, 7.7	1.2, 2.2, 3.6, 4.2, 5.3, 6.2, 7.2	1.1, 2.1, 3.4, 4.1, 5.5, 6.10, 7.7	1.2, 2.2, 3.7, 4.2, 5.1, 6.9, 7.3	1.10, 2.3, 3.2, 4.3, 5.9, 6.8, 7.2	1.7, 2.4, 3.7, 4.4, 5.3, 6.7, 7.4
4	1.5, 2.5, 3.5, 4.6, 5.4, 6.5, 7.3	1.6, 2.6, 3.4, 4.7, 5.7, 6.1, 7.3	1.7, 2.7, 3.3, 4.8, 5.10, 6.2, 7.3	1.8, 2.8, 3.4, 4.9, 5.5, 6.3, 7.3	1.9, 2.9, 3.37, 4.10, 5.6, 6.1, 7.5	1.10, 2.10, 3.10, 4.1, 5.7, 6.2, 7.6	1.1, 2.1, 3.3, 4.2, 5.1, 6.3, 7.10	1.2, 2.2, 3.6, 4.3, 5.2, 6.4, 7.2	1.9, 2.3, 3.1, 4.4, 5.10, 6.5, 7.1	1.6, 2.4, 3.6, 4.5, 5.4, 6.6, 7.5
5	1.6, 2.5, 3.6, 4.5, 5.3, 6.4, 7.5	1.1, 3.5, 2.1, 4.10, 5.6, 6.3, 7.1	1.6, 2.2, 3.4, 4.1, 5.9, 6.2, 7.7	1.3, 2.3, 3.5, 4.2, 5.4, 6.1, 7.4	1.1, 2.2, 3.8, 4.3, 5.9, 6.10, 7.5	1.2, 2.3, 3.9, 4.4, 5.8, 6.9, 7.6	1.3, 2.4, 3.2, 4.5, 5.2, 6.8, 7.9	1.4, 2.5, 3.5, 4.1, 5.3, 6.7, 7.1	1.8, 2.6, 3.3, 4.5, 5.1, 6.6, 7.5	1.5, 2.7, 3.5, 4.6, 5.5, 6.5, 7.4
6	1.7, 2.8, 3.7, 4.4, 5.2, 6.3, 7.1	1.8, 2.9, 3.6, 4.9, 5.5, 6.4, 7.2	1.5, 2.10, 3.5, 4.6, 5.8, 6.5, 7.8	1.10, 2.1, 3.1, 4.7, 5.3, 6.1, 7.4	1.1, 2.2, 3.8, 4.3, 5.9, 6.10, 7.5	1.2, 2.3, 3.9, 4.4, 5.8, 6.9, 7.6	1.3, 2.4, 3.2, 4.5, 5.2, 6.8, 7.9	1.4, 2.5, 3.5, 4.1, 5.3, 6.7, 7.1	1.7, 2.6, 3.3, 4.5, 5.1, 6.6, 7.5	1.4, 2.7, 3.5, 4.6, 5.5, 6.5, 7.4

Продолжение таблицы 3

Пред-по-след-няя цифра шифра	Последняя цифра шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
7	1.8, 2.8, 3.7, 4.4, 5.2, 6.3, 7.1	1.8, 2.9, 3.6, 4.9, 5.5, 6.4, 7.2	1.4, 2.10, 3.5, 4.6, 5.8, 6.5, 7.8	1.10, 2.1, 3.1, 4.7, 5.3, 6.1, 7.4	1.1, 2.2, 3.2, 4.8, 5.2, 6.2, 7.10	1.2, 2.3, 3.9, 4.9, 5.8, 6.3, 7.2	1.3, 2.4, 3.1, 4.10, 5.3, 6.1, 7.7	1.4, 2.5, 3.4, 4.2, 5.1, 6.2, 7.5	1.6, 2.1, 3.2, 4.1, 5.2, 6.3, 7.4	1.3, 2.2, 3.4, 4.7, 5.1, 6.4, 7.3
8	1.9, 2.3, 3.8, 4.3, 5.1, 6.2, 7.2	1.3, 2.1, 3.7, 4.8, 5.4, 6.1, 7.3	1.3, 2.2, 3.1, 4.5, 5.7, 6.10, 7.3	1.2, 2.3, 3.2, 4.4, 5.6, 6.9, 7.5	1.1, 2.4, 3.3, 4.3, 5.5, 6.8, 7.6	1.2, 2.5, 3.1, 4.2, 5.4, 6.7, 7.7	1.3, 2.6, 3.2, 4.1, 5.3, 6.6, 7.8	1.4, 2.7, 3.3, 4.3, 5.2, 6.5, 7.8	1.5, 2.8, 3.1, 4.2, 5.3, 6.4, 7.3	1.2, 2.9, 3.3, 4.8, 5.2, 6.3, 7.2
9	1.10, 2.2, 3.10, 4.1, 5.9, 6.10, 7.1	1.9, 2.3, 3.1, 4.3, 5.8, 6.9, 7.4	1.8, 2.4, 3.2, 4.2, 5.7, 6.8, 7.5	1.7, 2.5, 3.3, 4.1, 5.6, 6.7, 7.6	1.6, 2.6, 3.4, 4.5, 5.5, 6.6, 7.7	1.5, 2.7, 3.5, 4.4, 5.4, 6.5, 7.8	1.4, 2.8, 3.1, 4.2, 5.3, 6.4, 7.3	1.3, 2.9, 3.2, 4.8, 5.2, 6.3, 7.10	1.2, 2.10, 3.3, 4.1, 5.1, 6.2, 7.2	1.1, 2.1, 3.1, 4.10, 5.3, 6.1, 7.10

Примечание: для контрольной работы № 2 выполняются задания с первого по пятое.